Preparaduría IV

1.- Sea E_{ij} la matriz $n \times n$ con entrada (i, j)ésima 1 y 0 en el resto de las entradas. Hallar AE_{ij}, $E_{ij}A$, $E_{ij}AE_{st}$.

2.- Una *matriz de permutación* es una matriz que tiene exactamente un 1 en cada columna y cada fila. a) Cuántas matrices de permutación $n \times n$ hay? b) El producto de dos matrices de permutación del mismo tamanno es también una matriz de permutación. La suma? c) Muestre que toda matriz de permutación es inversible, y la inversa es su traspuesta. c) Para cuáles matrices de permutación P es $P^2 = I$.

3.- Sea A una transformación lineal en un espacio vectorial de dimensión finita V $[A : V \to V]$. Demuestre que son equivalentes:

a) A es inversible. b) V e $Im\,(A)$ tienen la misma dimensión. c) A manda una base en otra. d) A es inyectiva, ésto es, $Ker\,(A) = 0$. e) A es sobreyectiva.

4.- Para el espacio vectorial $\mathbb{P}\,[x]$ defina $\mathfrak{A}\,(f(x)) = f'(x)$, $\mathfrak{B}\,(f(x)) = xf(x)$. Compruebe que:

a) $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$ son transformaciones lineales.

b) $Im\,(\mathfrak{A}) = \mathbb{P}\,[x]$ aunque $Ker\,(\mathfrak{A}) \neq 0$.

c) $Ker\,(\mathfrak{B}) = \{0\}$ pero $\mathfrak{B}$ no es inversible.

d) $\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A} = I$.

e) $\mathfrak{A}^k\mathfrak{B} - \mathfrak{B}\mathfrak{A}^k = k\mathfrak{A}^{k-1}$, para todo k entero positivo.

5.- Sean B, $C \in M_n\,(\mathbb{C})$. Definir una transformación lineal $\mathfrak{T}$ en $M_n\,(\mathbb{C})$ como sigue:

$$\mathfrak{T}\,(X) = BXC \qquad , X \in M_n\,(\mathbb{C})$$

Muestre que $\mathfrak{T}$ es inversible si, y sólo si, tanto B como C son inversibles.

6.- Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita y $\mathfrak{A}$ una transformación lineal de V en W. Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) Si los vectores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son linealmente independientes, también $\mathfrak{A}\alpha_1, \mathfrak{A}\alpha_2, \ldots, \mathfrak{A}\alpha_n$ serán linealmente independientes.

b) Si los vectores $\mathfrak{A}\alpha_1, \mathfrak{A}\alpha_2, \ldots, \mathfrak{A}\alpha_n$ son linealmente independientes, también lo serán $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

7.- Sea W un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V. Si $\mathfrak{A}$ es una transformación lineal de W en V, podrá ser $\mathfrak{A}$ extendida a una transformación lineal de V en V?

8.- Si $\mathfrak{A}$ es una transformación lineal en $\mathbb{R}^3$ tal que

$$\mathfrak{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{A}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hallar $Im\,(\mathfrak{A})$ y la matriz de $\mathfrak{A}$ en la base canónica ordenada.

9.- Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 4 y $\mathfrak{A}$ la transformación lineal cuya representación matricial es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Hallar el Kernel y la Imagen de $\mathfrak{A}$. Tomar una base del Kernel y extenderla a una base de V, luego hallar la representación matricial de $\mathfrak{A}$ con respecto a esta base.

10.- Sea W un subespacio invariante bajo una transformación lineal $\mathfrak{A}$ en un espacio de dimensión finita V. a) Muestre que si $\mathfrak{A}$ es inversible, entonces W es también invariante por $\mathfrak{A}^{-1}$. b) Si $V = W \oplus W'$, será W' necesariamente invariante por $\mathfrak{A}$?

11.- Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Cuáles de las siguientes son semejantes a A?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 9 & 6 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

12.- a) Cuáles son las matrices que son semejantes sólo a sí mismas?

b) Para $k \geq 2$ calcular:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^k, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^k, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k$$

c) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Muestre que A^k es semejante a A para todo entero positivo k. Ésto es cierto, en general, para cualquier matriz tal que todos sus autovalores son 1.

13.- Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. La *traza* de una matriz en $M_n(\mathbb{F})$ [que denotaremos tr] es la suma de los elementos en la diagonal. Compruebe que la traza es un funcional lineal.

a)Demuestre que $tr(AB) = tr(BA)$. Observe que ésto implica que matrices semejantes tienen la misma traza.

b) Compruebe que $tr(AB)^k = tr(BA)^k$.

c) Demuestre que si $AB - BA = A$ entonces A es singular.

d) Compruebe que $tr(ABC) = tr(BCA)$ y que $tr[(AB - BA)(AB + BA)] = 0$.

e) Si cualquiera de A o B es no singular, muestre que AB y BA son semejantes. Son AB y BA semejantes en general?

f) Hallar A, B tales que $AB = 0$ pero $BA \neq 0$.

Sea ahora V el espacio de las matrices 2×2 sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y sea P una matriz 2×2 dada. Sea $\mathfrak{T}$ el operador lineal sobre V definido por $\mathfrak{T}(A) = PA$. Demuestre que $tr(\mathfrak{T}) = 2tr(P)$.

14.- a) Sean $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Probar que si $AB = 0$ entonces $tr(A+B)^k = tr(A)^k + tr(B)^k$.

b) Sea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Muestre que $tr\left(A^k\right) = tr\left(A^{k-1}\right) + tr\left(A^{k-2}\right)$.

15.- Sea W el espacio de matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. y sea W_0 el subespacio generado por las matrices C de la forma $C = AB - BA$. Demuestre que W_0 es exactamente el subespacio de las matrices de traza cero.

16.- Sea T un operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica ordenada por la matriz

$$T = \begin{bmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Demuestre que T es diagonalizable construyendo una base de autovectores. Lo mismo con la matriz:

$$U = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$

17.- Sea

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

Es A semejante, sobre $\mathbb{R}$, a una matriz diagonal? Es A semejante, sobre $\mathbb{C}$, a una matriz diagonal?

18.- Responda verdadero o falso:

a) Si $A^k = 0$ para todo $k \geq 2$, entonces $A = 0$.

b) Si $A^k = 0$ para algń k entonces $tr\,(A) = 0$.

c) Si $tr\,(A) = 0$ entonces $|A| = 0$.

d) Si A y B son semejantes entonces $|A| = |B|$.

e) Si A y B son semejantes entonces tienen los mismos autovalores.

f) Si A y B son tienen los mismos autovalores entonces son semejantes.

g) Si A y B tienen el mismo polinomio característico entonces tienen los mismos autovalores.

h) Si $tr\left(A^k\right) = tr\left(B^k\right)$ para todo k, entonces $A = B$.

i) diag $\{1, 2, \ldots, n\}$ [es decir, la matriz diagonal con entradas en ese orden] es similar a diag $\{n, \ldots, 2, 1\}$.

j) Si A tiene un autovalor con multiplicidad mayor que 1, entonces no es diagonalizable.

k) Si A tiene r autovalores distintos a cero, entonces $rk\,(A) \geq r$.

19.- Sean A y B matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$. Demuestre que si $I - AB$ es inversible entonces $I - BA$ es inversible también y que $(I - BA)^{-1} = I + B\,(I - AB)^{-1} A$. Usar ésto para probar que si A y B son matrices $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ entonces AB y BA tienen los mismos autovalores sobre $\mathbb{F}$.

20.- Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sea $\mathfrak{T}$ el operador lineal sobre V definido por

$$\mathfrak{T}\,(f)\,(x) = \int_0^x f\,(t)\ dt$$

Demuestre que $\mathfrak{T}$ no tiene autovalores.

21.- Sea A una matriz triangular $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$. Demuestre que los autovalores de A son los elementos de la diagonal de A. Puede utilizar ésto para demostrar que el funcional traza es único en el siguiente sentido: si W es el espacio de las matrices $n \times n$ sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ y si φ es un funcional lineal sobre W tal que $\varphi\,(AB) = \varphi\,(BA)$, $\forall A, B \in W$, entonces φ es un múltiplo escalar de la función traza. [en particular, si $\varphi\,(I) = n$, entonces $\varphi = tr$].

22.- Si $\mathfrak{T}$ es una transformación lineal en un espacio vectorial de dimensión n y si $\mathfrak{T}^{n-1}\,(x) \neq 0$, pero $\mathfrak{T}^{n}\,(x) = 0$, demuestre que $x, \mathfrak{T}\,(x)\,, \mathfrak{T}^2\,(x)\,, \ldots, \mathfrak{T}^{n-1}\,(x)$ son linealmente independientes. Cuáles son los autovalores de $\mathfrak{T}$? Hallar la representación matricial de $\mathfrak{T}$ con respecto a la base $x, \mathfrak{T}\,(x)\,, \mathfrak{T}^2\,(x)\,, \ldots, \mathfrak{T}^{n-1}\,(x)$.